数理解析研究所講究録
第 813 巻 1992 年 79-88



# Seifert surface に基づいた knot 補空間の foliation と Heegaard splitting

大阪大　理　　合田　洋　(Hiroshi Goda)

## 1 Introduction

$K$ を $S^3$ 内の knot とする。$R$ を $\partial R = K$ となる compact orientable surface で closed component をもたないものとするとき、$R$ は $K$ の Seifert surface であるという。$K$ が fibered knot であるとは、その exterior $E(K)(= S^3 - \mathrm{int}N(K))$ がある Seifert surface を fiber とする $S^1$ 上の fiber bundle になるときいう。また、その Seifert surface を fiber surface と呼ぶ。本稿では、knot 補空間の foliation 及び Heegaard splitting から得られる量で、fiber surface に対する値が共に 0 となるものを 比較することを考える。

## 2 Preliminary

3-manifold theory, foliation 及び sutured manifold theory に関する用語等については [1], [3], [10], [11], [14] を参照して下さい。以下、

$M$: a compact orientable 3-manifold.

$\mathcal{F}$: a foliation on $M$ such that

(1) codimension 1,

(2) transversely oriented,

(3) $\partial M$ は $\mathcal{F}$ の leaf または $\mathcal{F}$ に transverse.

とする。

定義 2.1. $L$ を $\mathcal{F}$ の leaf とする。$L$ 及び $\mathcal{F}$ の depth を 次の様に定める。

∘ $L$ が depth 0 である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $L$ は compact

∘ depth $j (\leq k)$ leaf が定まったとする。このとき、

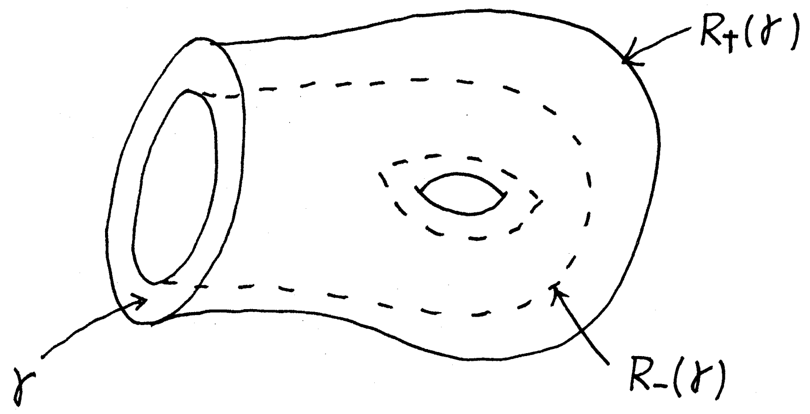
$L$ が depth $k+1$ である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\overline{L}-L$ が a union of depth $j(\leq k)$ leaves,

$\overline{L}-L$ は depth $k$ leaf を含む

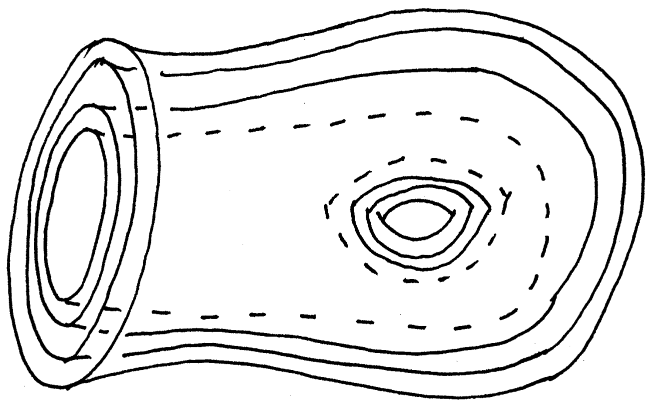
○ $\mathcal{F}$ が depth $k$ である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $k=\max\{$ depth $(L)\,|\,L$: a leaf of $\mathcal{F}\}$

注意: leaf 及び foliation の depth は 一般に定義できるとは限らない。

例 2.2. $M=$(once punctured torus $T^\circ$) $\times I$, $\gamma=\partial T^\circ\times I$ となる sutured manifold $(M,\gamma)$ を考える。

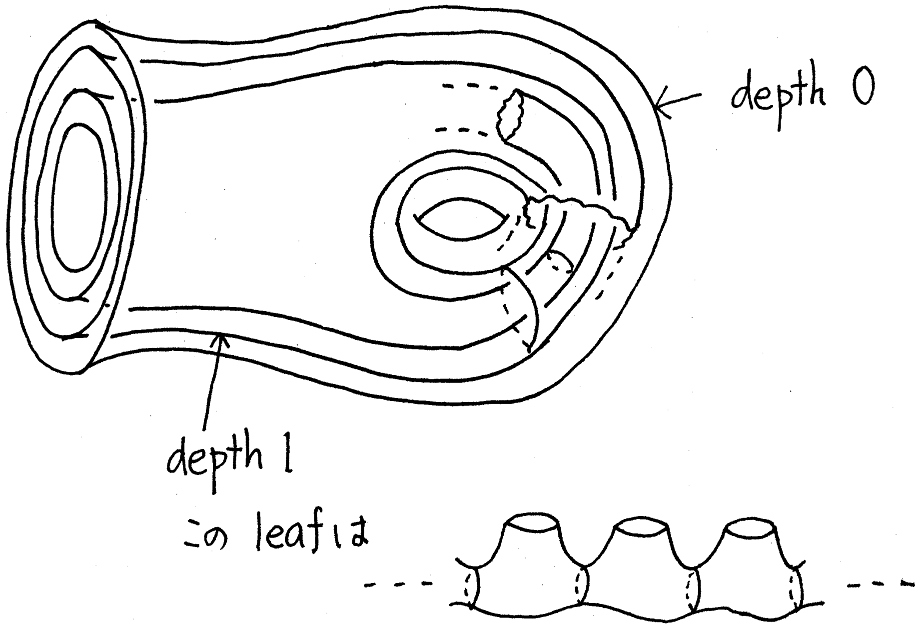



$\mathcal{F}_0$ を $(M,\gamma)$ を $T^\circ\times\{*\}$ で foliate したものとする。



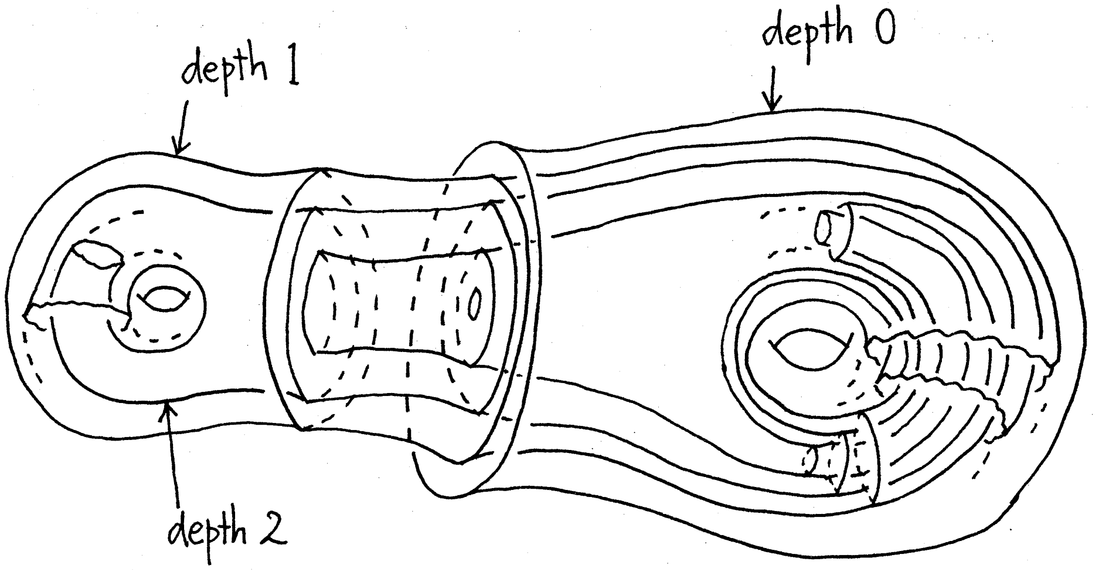
このとき、depth$(\mathcal{F}_0)=0$。

次に $\mathcal{F}_1$ を $R_+(\gamma), R_-(\gamma)$ を leaf とし、残りの所を次の様に foliate したものとする。




このとき、depth$(\mathcal{F}_1) = 1$。

$\mathcal{F}_2$ を 上の $\mathcal{F}_1$ の copy を $\gamma$ で張り合わせたものとする。




このとき、depth$(\mathcal{F}_2) = 2$。

より一般には [12] を参照。

定義 2.3. $\Sigma$ を $M$ の submanifold とする。このとき、

$\Sigma$ が $\mathcal{F}$ に transverse $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\Sigma$ と交わる $\mathcal{F}$ の全ての leaf と $\Sigma$ は transverse

に交わる

定義 2.4. $\mathcal{F}$ が taut $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{F}$ の 各 leaf に対して、transverse circle もしくは

properly embedded transverse arc が存在する

以上の notation のもと 次のことが知られている。

定理 2.5 ([6]). $K$: a knot in $S^3$, $R$: a minimal genus Seifert surface for $K$ とする。このとき、$E(K)$ 上の taut finite depth foliation $\mathcal{F}$ で $R$ は $\mathcal{F}$ の leaf, $\mathcal{F}$ $|\partial N(K)$ は circle で foliate されるものが存在する。

定義 2.6. $(M,\gamma)$ を $S^3$ 内の sutured manifold とする。次の条件を満たす sutured manifold decomposition の列 $(M,\gamma) \xrightarrow{D_1} \cdots \xrightarrow{D_n} (M_n,\gamma_n)$ が存在するとき この $(M,\gamma)$ は completely disk decomposable であるという。

(1) 各 $D_i$ は disk,

(2) $M_n$ は connected,

(3) $\partial M_n$ は a union of spheres $S_1,\ldots,S_j$,

(4) $S_i \cap s(\gamma_n)$ は a simple closed curve for $1 \leq i \leq j$.

定理 2.7 ([4]). $(M,\gamma)$ を ある Seifert surface $R$ の complementary sutured manifold とする。いま $(M,\gamma)$ が completely disk decomposable ならば、$M$ 上に taut foliation $\mathcal{F}$ で多くとも depth 1, $\mathcal{F} \pitchfork \gamma$, $R(\gamma)$ は $\mathcal{F}$ の compact leaf となるものが存在する。特に、$\partial R$ が knot ならば、$\mathcal{F}$ $|\gamma$ は circle で foliate される。

# 3 Depth and handle number of Seifert surfaces in $S^3$

定義 3.1. $S^3$ 内の knot $K$ の minimal genus Seifert surface $R$ に対して、depth とは 次の様に定義されるものである。

$$d(R) = \min\{\text{depth}(\mathcal{F}) \,|\, \mathcal{F} \text{ は } E(K) \text{ 上の taut foliation で } R \text{ は } \mathcal{F} \text{ の leaf}, \; \mathcal{F} \,|\partial N(K) \text{ は circle で foliate される。}\}$$

注意: Seifert surface に minimal genus という仮定がつくのは、次のことによる。

定理 3.2 ([15]). $K$ を $S^3$ 内の knot とし、$\mathcal{F}$ を ある Seifert surface $R$ を leaf にもつ $E(K)$ 上の foliation と する。このとき、$\mathcal{F}$ が taut ならば、$R$ は $K$ の minimal genus Seifert surface になる。

定義 3.3. $(W, W')$ が complementary sutured manifold $(M, \gamma)$ の Heegaard splitting である。

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (1) $W, W'$ は compression body,

(2) $W \cup W' = M$,

(3) $W \cap W' = \partial_+ W = \partial_+ W'$,

(4) $\partial_- W = R_+(\gamma), \partial_- W' = R_-(\gamma)$.

compression body については [9] を 参照。

定義 3.4. $S^3$ 内の Seifert surface $R$ に対して handle number とは 次の様に定義されるものである。

$$h(R) = \min\{W \text{ の attaching 1-handle の数} \mid (W, W') \text{ は } R \text{ の complementary sutured manifold の Heegaard splitting}\}$$

このとき 次のことがわかる。

命題 3.5. 次の 3 つは同値である。

(1) $R$ は fiber surface.

(2) $d(R) = 0$.

(3) $h(R) = 0$.

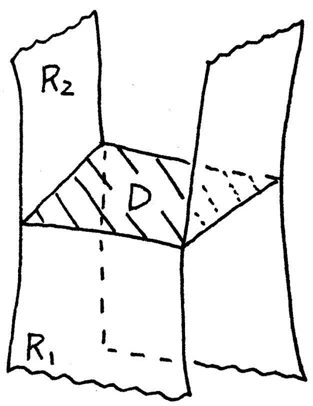
定理 3.6. 任意の 正整数 $k$ に対して、$d(R_k) = 1$, $h(R_k) = k$ となる Seifert surface $R_k$ が 存在する。

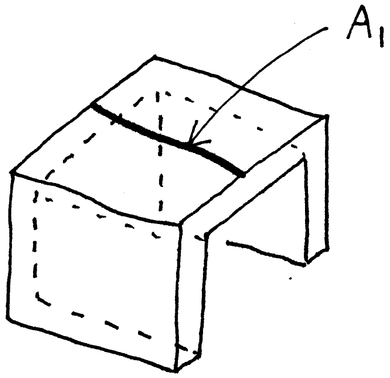
## 4 Proof

定理 3.6 の証明の為に いくつか定義をする。

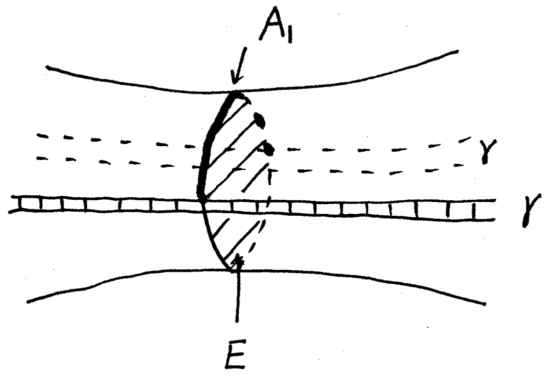
$R$ を Seifert surfaces $R_1$, $R_2$ を plumbing して得られる Seifert surface とし、$D = R_1 \cap R_2$ とおく。

定義 4.1. $R_1$ の marked sutured manifold とは次の様にして構成されるものである。まず、$R_1$ の complementary sutured manifold を $(M_1, \gamma_1)$, $I_1$ を embedding $D \subset R_1$ に対する $D$ の core とする。すなわち、$I_1$ は $R_1$ 内の properly embedded arc で $D$ は $R_1$ 内で $I_1$ の regular neighborhood になっているとする。$I_1$ を $R_1$ から $R_2$ が attach している方向に押し出すことで、$R(\gamma_1)$ 内の properly embedded arc $A_1$ が得られる。この sutured manifold と properly embedded arc の組 $(M_1, \gamma_1, A_1)$ を marked sutured manifold という。




定義 4.2. $E$ が marked sutured manifold $(M_1, \gamma_1, A_1)$ の product disk with $A_1$ as an edge とは、$E$ が $M_1$ 内の properly embedded disk で $\partial E$ は $s(\gamma_1)$ とちょうど 2 点で交わり、$A_1 \subset \partial E$ となっているときいう。

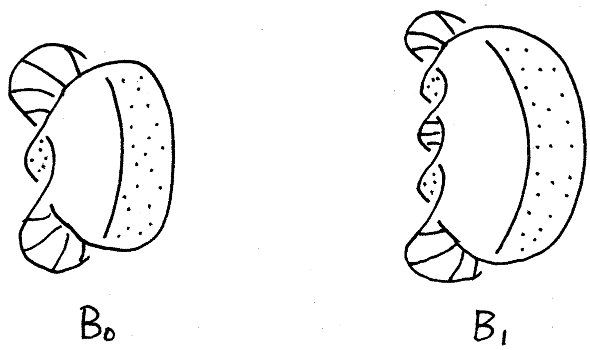



以上の notation のもと、次のことが知られている。

定理 4.3 ([9]). $R$ を Seifert surfaces $R_1, R_2$ を plumbing して得られる Seifert surface とし、$R_1$ の maked sutured manifold を $(M_1, \gamma_1, A_1)$ とする。いま、$M_1$ 内に product disk with $A_1$ as an edge が存在するならば、$h(R) = h(R_1) + h(R_2)$ が 成立する。

◇ 定理 3.6 の 証明。

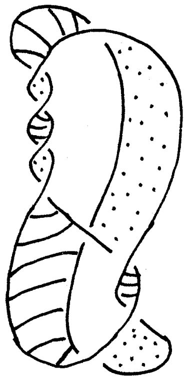
次の unknotted annulus with 1 or 2 full twists $B_0, B_1$ を 考える。




補題 4.4 (cf. [7]). $h(B_0) = 0$.

補題 4.5 (cf. [7]). $h(B_1) = 1$.

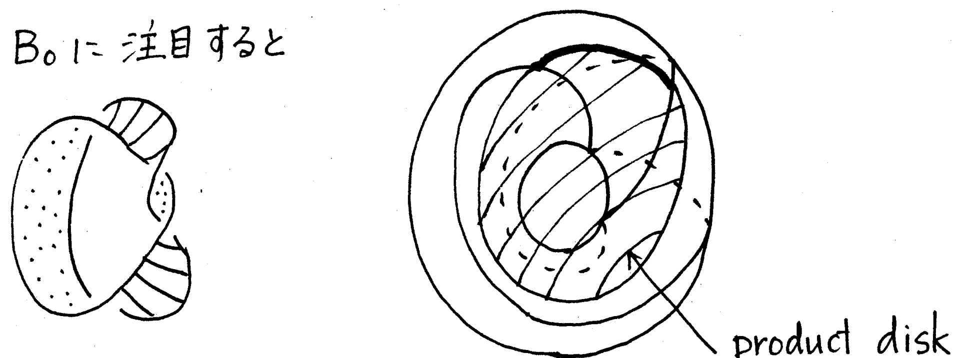
$B_0$ と $B_1$ を 次図の様に plumbing したものを $R_1$ とする。



$R_1$

補題 4.6. $h(R_1) = 1$.

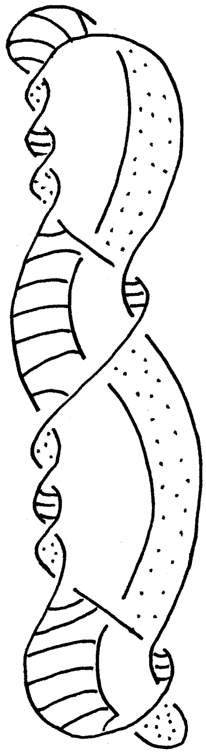
∵ $B_0$ に注目すると




∴ Thm 4.3 より $h(R_1) = 1$.

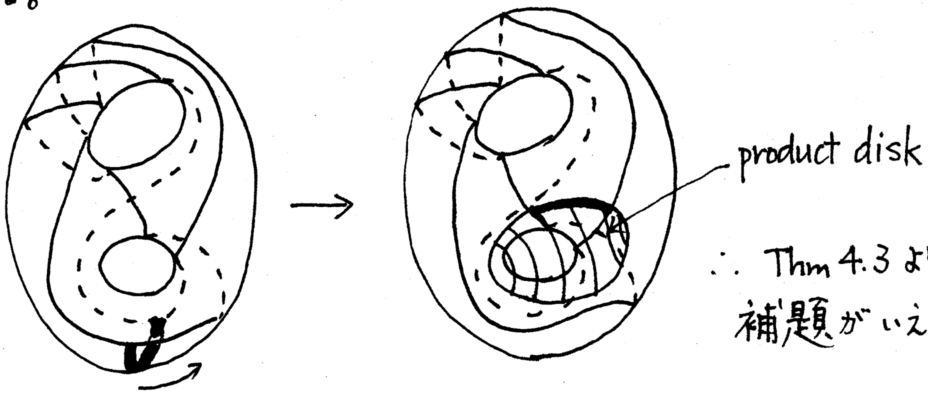
$R_1$ を 下図の様に $k$ 個 plumbing したものを $R_k$ と する。

例. $k=2$



補題 4.7. $h(R_k) = k$.

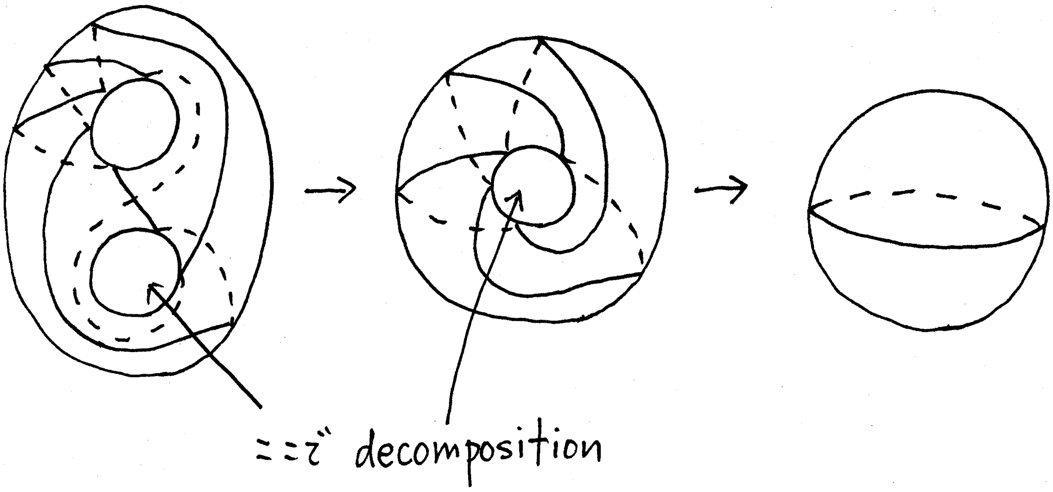
∵ $R_1$ の marked sutured manifold をみる。




∴ Thm 4.3 より
補題がいえる。

補題 4.8. $R_k$ の complementary sutured manifold は completely disk decomposable.

∵ 例. $R_1$ の complementary sutured manifold




以上、補題 4.7 及び 補題 4.8, 定理 2.7 より定理 3.6 が いえる。

## 参考文献


[1] C.Camacho, A.L.Neto: Geometric Theory of Foliations, BIRKHÄUSER.

[2] J.Cantwell, L.Conlon: Depth of knots, Topology and its Appl. 42 (1991) 277-289.

[3] D.Gabai: Foliations and the topolgy of 3-manifolds, J. Differential Geometry 18 (1983) 445-503.

[4] D.Gabai: Foliations and genera of links, Topology 23 (1984) 381-394.

[5] D.Gabai: Genera of the arborescent links, Mem.Amer.Math.Soc.,vol.59, No.339, 1986.

[6] D.Gabai: Foliations and the topology of 3-manifolds III, J. Differential Geometry 26 (1987) 479-536.

[7] 合田 洋: Seifert surface と Heegaard splitting, 津田塾大数学 計算機科学研究所報 2, 3-4 次元多様体と結び目理論 (1991) 114-129.

[8] 合田 洋: Some cancelling disk pair and the handle number of Seifert surfaces in $S^3$, 研究集会 結び目理論とその応用 報告集 (賢島) (1991) 51-54.

[9] H.Goda: On handle number of Seifert surfaces in $S^3$, to appear Osaka.J.Math.

[10] G.Hector, U.Hirsch: Introduction to the Geometry of Foliations Part A,B, Braunschweig, Wiesbeden.

[11] J.Hempel: 3-manifolds, Ann. of Math. Studies 86, Princeton Univ. Press, 1976.

[12] T.Nishimori: Behavior of leaves of codimension-one foliations, Tôhoku Math.J. 29 (1977) 255-273.

[13] 小林 毅: D.Gabai による, knot complement 上の foliation の構成, 数理研講究録 577, Foliations and K-theory (1985) 164-194.

[14] 田村 一郎: 葉層のトポロジー, 岩波書店, 1976.

[15] W.Thurston: A norm for the homology of three-manifolds, Mem.Amer.Math.Soc., vol.59, No.339, 1986.